

CONTROLE CONTINUE N° 2

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent pour une partie importante dans l'appréciation de la copie.

Toute fraude ou tentative de fraude sera sévèrement sanctionnée

Problème 1

- 1) Soit $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$
- donner le développement limité à l'ordre 5 de $f(x)$ au voisinage de 0.
 - donner l'équation de la tangente en 0
 - donner $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.
- 2) Soit $g(x) = (x^2-1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$
- donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de $g(x)$
 - donner l'équation de l'asymptote à la courbe représentative C_g de g et sa position par rapport à C_g au voisinage de $+\infty$

Problème 2

- 1) Soit f une fonction continue de $[1, +\infty]$ dans \mathbb{R} .
- Montrer que si $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente alors $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergent.
- 2) a) Soient f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , u et v deux fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \int_{v(x)}^x f(t) dt$. En utilisant une primitive F de f démontrer que g est dérivable et que $g'(x) = u'(x) \cdot f[u(x)] - v'(x) \cdot f[v(x)]$
- 3) a) Calculer $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$ b) Calculer $\int \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} dx$
- 4) soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$
- Montrer que l'intégrale I_n est convergente
 - en faisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$
 - calculer I_1
 - Montrer que $I_n = \frac{(2n-2)!}{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)]^2} \frac{\pi}{2}$

5) Etudier la nature de l'intégrale généralisée

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Problème 3

- 1) Donner la solution générale $y(x)$ de l'équation différentielle du premier ordre suivante
- $$y' - \cos(x) y = \sin(2x)$$
- 2) Considérant l'équation différentielle d'ordre 2 suivante : $y'' - (m+1)y' + m \cdot y = e^x$ ou m est un paramètre réel.
- donner la solution générale $y_0(x)$ de l'équation sans second membre
 - donner la solution générale $y(x)$ de l'équation complète.

Problème 1 a) a) $f(x) = \cos x^{\sin x} = e^{\sin x \ln \cos x}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) ; \ln \cos x = \ln \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) \right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2}{2} + o(x^5)$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)$$

$$\sin x \ln \cos x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5) \right) = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5)$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^5)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)$$

b) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^4) ; f''(x) = -3x + o(x^3) ; f'''(x) = -3 + o(x^2) ; f^{(4)}(x) = 0 + o(x)$

$$f'(0) = 0 ; f''(0) = 0 ; f'''(0) = -3 ; f^{(4)}(0) = 0$$

2) $g(x) = (x^2-1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = (x^2-1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \left(\frac{1}{x^2}-1 \right) \ln \left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} \right)$

$$= \frac{1-x^2}{x^2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1-x^2}{x^2} \left(\ln(1+x) - \ln(1-x) \right) = \frac{1-x^2}{x^2} \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right)$$

$$= \frac{1-x^2}{x^2} \left(2x + \frac{2x^3}{3} + o(x^4) \right) = \frac{1}{x^2} \left(2x + \frac{2}{3}x^3 - 2x^3 + o(x^4) \right) = \frac{1}{x^2} \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) \right)$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{4}{3}x + o(x^2) = 2x - \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow D: y=2x$ est A.O en + ∞

$g(x) - 2x$ a le signe de $-\frac{4}{3x}$ donc (g) est au dessous de D sur $]0, +\infty[$

Problème 2 1) $t \in [1, +\infty[\Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \leq 1 \Rightarrow \frac{f(t)}{t} \leq f(t)$ si f est positive sur $[1, +\infty[$

$$\text{alors } 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \leq \int_1^{+\infty} f(t) dt$$

Si $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ c.v alors $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ c.v

2) F est une primitive de f sur \mathbb{R} donc F est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}: F'(x) = f(x)$

d'où $g(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = [F(t)]_{v(x)}^{u(x)} = F(u(x)) - F(v(x))$

F, u, v dérivables $\Rightarrow g$ dérivable et $g'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) - F'(v(x)) \cdot v'(x)$

car $g'(x) = u'(x) f(u(x)) - v'(x) f(v(x))$

3) a) $f(x) = \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

d'où $f(x) = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x-2} + \frac{9}{x+2}$

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 7 \ln|x-2| + 9 \ln|x+2| + K$$

b/ $G(x) = \int \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} dx$ On pose $x = t^4$ $dx = 4t^3 dt$

$$G(x) = \int \frac{t^3 + t^2}{t^4(t^2-1)} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t}{t^2-1} dt = 4 \int 1 + \frac{1}{t-1} dt = 4(t + \ln|t-1|) + K$$

$$= 4(\sqrt[4]{x} + \ln|\sqrt[4]{x}-1|) + K$$

4/ Voir TD

5/ $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ c.v si et seulement si $\alpha < 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ c.v si et seulement si $\alpha > 1$

donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, J diverge

Problème 3 1/ (E): $y' - \cos x \cdot y = \sin 2x$

• Résolution de (E'): $y' - \cos x \cdot y = 0 \rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \Rightarrow \ln|y| = \sin x + C$

$\Rightarrow y_1 = K e^{\sin x}$ sol de (E')

• Déterminons une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = K e^{\sin x}$

On a $y_0' = K' e^{\sin x} + K \cos x e^{\sin x}$ Alors $y_0' - \cos x y_0 = \sin 2x$

$\Rightarrow K' e^{\sin x} + K \cos x e^{\sin x} - \cos x \cdot K e^{\sin x} = \sin 2x \Rightarrow K' = \sin 2x e^{-\sin x}$

$K = 2 \int \sin x \cos x e^{-\sin x} dx$ On pose $\begin{cases} u = \sin x \\ u' = \cos x e^{-\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \cos x \\ v = -e^{-\sin x} \end{cases}$

$K = 2 \left(\sin x e^{-\sin x} + \int \cos x e^{-\sin x} dx \right) = 2 \left(-\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x} \right)$

d'où $y_0 = 2(-\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x}) \cdot e^{\sin x} = -2\sin x - 2$

et $y = y_1 + y_0 = K e^{\sin x} - 2\sin x - 2$

2/a/ (E'): $y'' - (m+1)y' + my = e^x$

l'équation caractéristique est: $\pi^2 - (m+1)\pi + m = 0$; $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$

Si $m = 1$ alors $\pi = \frac{-b}{2a} = 1$ et $y_1 = (\alpha x + \beta) e^x$

Si $m \neq 1$ alors $\Delta > 0$; $\pi_1 = \frac{m+1-m+1}{2} = 1$; $\pi_2 = \frac{m+1+m-1}{2} = m$

et $y_1 = \alpha e^x + \beta e^{mx}$

b/ 1° cas: Si $m = 1$ alors (E): $y'' - 2y' + y = e^x$

la solution particulière de (E) est $y_0 = a x^2 e^x$ ($\alpha = 1$ racine double de l'éq caractéristique)

$y_0' = a(2x + x^2) e^x$; $y_0'' = a(2 + 4x + x^2) e^x$

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = e^x \Rightarrow a(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2) = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} x^2 e^x \Rightarrow y = y_1 + y_0 = (\alpha x + \beta) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$

2° cas Si $m \neq 1$ alors $y_0 = a x e^x$ ($\alpha = 1$ est solution simple de l'éq caractéristique)

$y_0' = a(x+1)e^x$, $y_0'' = a(x+2)e^x$, $y_0'' - 2y_0' + y_0 = e^x \Rightarrow a = \frac{1}{1-m} \Rightarrow y_0 = \frac{x}{1-m} e^x$

$\Rightarrow y = y_1 + y_0 = \alpha e^x + \beta e^{mx} + \frac{x}{1-m} e^x$ solution de (E).



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..